
SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

B. FRANCHI

DISUGUAGLIANZA DI HARNACK PER OPERATORI ELLITTICI DEGENERI:
UNA CONDIZIONE GEOMETRICA

Bologna, 22 MARZO 1984

1. Consideriamo un operatore ellittico del secondo ordine in forma di divergenza $L = \sum_{i,j=1}^n \partial_i (a_{ij} \partial_j)$, dove $a_{ij} = a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, Ω essendo un aperto di \mathbb{R}^n . E' ben noto ([12]), allora, il seguente risultato (disuguaglianza di Harnack):

Supponiamo Ω connesso e sia $u \in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$, $u \geq 0$ soluzione debole di $Lu = 0$; allora per ogni compatto $K \subseteq \Omega$, esiste $C_K > 0$ (indipendente da u) tale che

$$(1.a) \quad \sup_K u \leq C \inf_K u.$$

Supponiamo ora che la forma quadratica associata a L possa generare in Ω ; supponiamo cioè che

$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq 0 \quad \forall (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$. Ci si chiede se possa sussistere una disuguaglianza analoga a (1.a) per le soluzioni deboli (convenientemente definite).

Il problema è stato considerato da numerosi autori: si vedano, ad esempio, [10], [14], [9], [2], [3] e [1] per un operatore a coefficienti C^∞ che soddisfi la condizione di ipoellitticità di Hörmander. Tuttavia, nei risultati contenuti nel primo gruppo di lavori, viene richiesta qualche forma di sommabilità sull'inverso del più piccolo autovalore della matrice $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,n}$; ciò esclude operatori per i quali il più piccolo autovalore è fortemente degenere o, addirittura, nullo identicamente.

In questo seminario presenterò alcuni risultati ottenuti in collaborazione con E. Lanconelli ([5] e [7]): una condizione di tipo "geometrico" sull'operatore che permetta di provare (1.a) per una classe d'operatori ellittici degeneri che contiene, in particolare, operatori a coefficienti non regolari per i quali il più piccolo autovalore della for

ma quadratica è identicamente nullo. Premettiamo alcune considerazioni che servono a giustificare e a illustrare questo metodo.

Il primo punto consiste nell'osservare che, grazie a un risultato di Bombieri-Moser ([13]), la disuguaglianza di Harnack per l'operatore L è conseguenza delle due disuguaglianze seguenti:

$$(1.b) \quad \exists p > 2 \text{ tale che, } \forall z_0 \in \Omega, \text{ esistono un intorno } V \text{ di } z_0 \text{ e una costante } C = C(V, p) > 0 \text{ tali che}$$

$$\|u\|_{L^p(V)} \leq C \left(\int_{\Omega} \langle A(x) \nabla u(x), \nabla u(x) \rangle + |u(x)|^2 \right)^{1/2}$$

$$\forall u \in C_0^1(\Omega);$$

(1.c) sia $\bar{x} \in \Omega$ un punto fissato. Esistono allora

$$\rho_1 > 0, \rho_0 > 0 \quad (\rho_0 \geq \rho_1), \quad C > 0 \text{ tali che}$$

$$\left(\int_{B(\bar{x}, \rho)} |u - u_\rho| dx \right)^2 \leq C \int_{B(\bar{x}, \rho_0)} \langle A(x) \nabla u(x), \nabla u(x) \rangle dx$$

$$\forall u \in C^1(\Omega), \quad \forall \rho \leq \rho_1, \quad \text{dove } u_\rho =$$

$$= \mu(B(\bar{x}, \rho))^{-1} \int_{B(\bar{x}, \rho)} u \, dx \quad (B(x, \delta) \text{ è la sfera di centro } \bar{x} \text{ e raggio}$$

$$\delta \geq 0 \text{ e } \mu \text{ la misura di Lebesgue}).$$

La disuguaglianza (1.b) è, essenzialmente, una immersione locale dello "spazio delle soluzioni deboli" in un conveniente L^p , con $p > 2$, analoga al classico teorema di Sobolev per il caso ellittico. La disuguaglianza (1.c) è, invece, una disuguaglianza di Poincaré "grezza"; grezza in quanto non si dà una dipendenza di ρ_0 e C da ρ (nel caso ellittico $\rho_0 = c_1 \rho$ e $C = c_2 \rho^{2+n}$). Osserviamo inoltre che è impreciso parlare di "spazio delle soluzioni deboli" per la scarsa regolarità della matrice A ;

è possibile comunque dare una formulazione corretta nel caso generale.

Osserviamo infine che il passaggio da (1.b) e (1.c) alla disuguaglianza di Harnack non è immediato, ma richiede un adattamento della tecnica iterativa di Moser al caso degenere ([11]), oltre al vero e proprio lemma di Bombieri-Moser (v. appendice A); più precisamente, si tratta di sostituire la norma del gradiente ordinario con la norma del gradiente degenere $\langle A(x) \nabla u(x), \nabla u(x) \rangle^{1/2}$.

Ora, supponiamo per un momento che la matrice A sia sufficientemente regolare (sia, ad esempio, C^1); è possibile allora associare alla matrice A una metrica in modo naturale (ciò è stato illustrato in [6]): dati $x, y \in \Omega$ possiamo definire distanza $d(x, y)$ il tempo minimo necessario per andare da x a y lungo una curva γ sub-unitaria nel senso di [4], tale cioè che $\forall \xi \in \mathbb{R}^n \langle \dot{\gamma}(t), \xi \rangle^2 \leq \langle A(\gamma(t)) \xi, \xi \rangle \forall t$ (altre definizioni equivalenti sono esposte in [6]). Se L è ellittico, allora d è equivalente a una metrica riemanniana. Nel caso generale, sotto ipotesi molto naturali, si è visto in [6] che la metrica d può essere considerata come una metrica riemanniana singolare; si potrebbe dunque pensare di utilizzare questa analogia per dimostrare le disuguaglianze (1.b) e (1.c) utilizzando delle "coordinate geodetiche". Purtroppo, le "geodetiche" della metrica d hanno un comportamento per vari aspetti "patologico": infatti, anche nei casi più regolari, viene a mancare l'iniettività ([6]) e la regolarità ([8]). L'idea fondamentale del nostro lavoro (che è formalizzata nella definizione di struttura sub-riemanniana data più avanti) è quella di sostituire le geodetiche con delle famiglie abbastanza ricche di curve "subgeodetiche", di curve cioè che sono sub-unitarie rispetto all'operatore.

2. Sia $\alpha > 0$ e $\forall x \in \Omega$ sia $B(x)$ una matrice reale simmetrica $n \times n$ tale che $\langle B(x) \xi, \xi \rangle \geq 0 \quad \forall (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$; diremo che B definisce una struttura α -sub-riemanniana su Ω se $\forall z_0 \in \Omega$ esiste un intorno V di z_0 , un vettore $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $\bar{r}, C, t_0 \in \mathbb{R}_+$ e una applicazione di classe $C^1(t, y, z) \rightarrow x(t, y, z)$ da $[0, t_0] \times B(y_0, \bar{r}) \times V$ a Ω tali che:

$$(2.a) \quad \forall z \in V, \forall y \in B(y_0, \bar{r}) \text{ la curva } t \rightarrow x(t, y, z) \text{ è sub-unitaria rispetto a } B \text{ (cioè } \langle \frac{\partial x}{\partial t}(t, y, z), \xi \rangle^2 \leq \langle B(x(t, y, z)) \xi, \xi \rangle \\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [0, t_0] \text{ e } x(0, y, z) = z_0;$$

$$(2.b) \quad \forall z \in V, \forall t \in]0, t_0], \text{ l'applicazione } y \rightarrow x(t, y, z) \text{ è iniettiva in } B(y_0, \bar{r});$$

$$(2.c) \quad \forall z \in V, \forall y \in B(y_0, \bar{r}), \quad \forall t \in]0, t_0],$$

$$\left| \det \frac{\partial x}{\partial y}(t, y, z) \right| \geq C t^\alpha.$$

Per comprendere meglio la ragione della definizione data, supponiamo che B sia strettamente positiva e dipenda da x in modo abbastanza regolare; in questo caso la metrica $\langle B(x)^{-1} \xi, \xi \rangle$ definisce una struttura riemanniana su Ω . E' allora facile vedere che, se \exp_z è l'applicazione esponenziale usuale nel punto z , la famiglia di curve geodetiche $t \rightarrow \exp_z(ty) = x(t, y, z)$ soddisfa (2.a), (2.b) e (2.c). Infatti la curva $t \rightarrow x(t, y, z)$ è sub-unitaria in quanto proiezione su Ω della soluzione del sistema hamiltoniano associato a $H(x, p) = \frac{1}{4} \langle B(x) p, p \rangle$, $p >$ con dati di Cauchy $x(0) = z$, $p(0) = 2(B(z))^{-1}y$. Qui $\alpha = n$.

Osserviamo inoltre che, se B è una matrice $n \times n$ limitata e continua e $\phi: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^p$ è una funzione continua tale che $|\phi| \leq 1$, allora ogni curva integrale del sistema $\dot{x} = B(x)\phi(t)$ è sub-unitaria per la

matrice $B^t B$, poiché $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $\langle \dot{x}(t), \xi \rangle^2 = \langle B(x(t))\phi(t), \xi \rangle^2 \leq |\phi(t)|^2 |{}^t B(x(t)) \xi|^2 \leq \langle (B^t B)(x(t)) \xi, \xi \rangle$. Se poi $n = p$ e se $\sup |\phi|$ è abbastanza piccolo, $x(\cdot)$ è anche sub-unitaria per B . In particolare, se B è abbastanza regolare, ogni soluzione del sistema hamiltoniano $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \xi}$, $\dot{\xi} = -\frac{\partial H}{\partial x}$, dove $H(x, \xi) = \langle B(x)^t B(x) \xi, \xi \rangle$ (oppure $H(x, \xi) = \langle B(x) \xi, \xi \rangle$ se $n = p$) è sub-unitaria rispetto a $B^t B$ (rispetto a B) se $|\xi(0)|$ è abbastanza piccolo.

Definiamo ora la classe di operatori differenziali per la quale vengono provate (1.b) e (1.c). Sia

$$L = \sum_{i,j=1}^n \partial_i (a_{ij} \partial_j)$$

un operatore differenziale del secondo ordine in forma di divergenza, dove $a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty \forall i, j = 1, \dots, n$. Supporremo che

(2.d) *esiste una matrice continua $B = {}^t B \geq 0$ tale che, $\forall x \in \Omega$, $B(x) \leq A(x)$ e che definisce una struttura α -sub-riemanniana su Ω per un $\alpha > 0$ conveniente.*

(Potremmo anche considerare termini di ordine inferiore nell'operatore, potremmo cioè raggiungere un termine $\sum_{j=1}^n b_j \partial_j$, dove $b = (b_1, \dots, b_n)$ è tale che esiste $\theta > 0$, tale che $\theta b(x)$ è sub-unitario rispetto ad $A(x)$ q.d. in Ω).

Osserviamo esplicitamente che la forma di L e l'ipotesi (2.d) sono invarianti per cambiamenti di variabili C^1 . Infatti, se $\phi: \Omega \rightarrow \Omega'$ è un diffeomorfismo di classe C^1 tale che $0 < c_1 \leq \left| \det \frac{\partial \phi}{\partial x} \right| \leq c_2$ e $x(t, y, z)$ è una famiglia di applicazioni che verifica (2.a), (2.b) e (2.c) relati-

vamente alla matrice B , la famiglia $\tilde{x}(t, y, \phi(z)) = \phi(x(t, y, z))$ verifica le stesse proprietà rispetto a $(\frac{\partial \phi}{\partial x}) B^t (\frac{\partial \phi}{\partial x}) (\phi^{-1}(y))$.

Mostriamo qualche esempio di operatore che soddisfa (2.d)

Esempio 2.1. Se L è strettamente ellittico, allora esiste $\lambda > 0$ tale che $\lambda^2 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j$ q.d. in $\Omega \forall \xi \in \mathbb{R}^n$. Basta allora scegliere $B = \lambda^2 I$ e $x(t, y, z) = z + \lambda t y$, con $|y| \leq 1$ (qui $\alpha = n$).

Osservazione 2.2. Supponiamo che la forma quadratica associata a L verifichi la disuguaglianza

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j^2(x) \xi_j^2$$

$\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ q.d. in Ω , dove le λ_j sono funzioni reali non negative di classe $C^1(\Omega)$. Sia $x(t, z, y)$ la soluzione del problema di Cauchy $\dot{x}_j = \lambda_j(x) y_j$, $x_j(0) = z_j$, $j = 1, \dots, n$. E' evidente che, se $|y| \leq c$, $x(\cdot, z, y)$ è una famiglia di curve che soddisfano (2.a), (2.b), (2.c) con $B = B_1$, ove $B_1 = (\lambda_j \delta_{ij})_{i,j=1, \dots, n}$.

Osserviamo ora che, se esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ tali che, $\forall z_0 \in \Omega \exists V$ intorno di z_0 , $\exists y_0 \in \mathbb{R}^n$, $C, \bar{r} \in \mathbb{R}_+$ tali che

$$(2.2.a) \quad x_j(t, z, y) - z_j \geq C t^{\alpha_j} \quad \forall t \in]0, t_1],$$

$$j = 1, \dots, n,$$

allora (2.c) è soddisfatta con $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

$$\begin{aligned} \text{Poniamo infatti } y_j &= \frac{\partial x}{\partial y_j}; \text{ si ha: } |\det(u_1, \dots, u_n)| = \\ &= (\det {}^t(u_1, \dots, u_n)(u_1, \dots, u_n))^{1/2} = (\det (\langle u_i, u_j \rangle)_{i,j=1, \dots, n})^{1/2}. \end{aligned}$$

D'altra parte, il k -mo autovalore di $(\langle u_i, u_j \rangle)_{i,j=1,\dots,n}$ è uguale

$$a \min_{\dim V=k} \max_{\xi \in V \cap \mathbb{S}^{n-1}} Q(\xi), \text{ dove } Q(\xi) = \sum_{i,j=1}^n \langle u_i, u_j \rangle \xi_i \xi_j =$$

$$= \left| \frac{\partial}{\partial \lambda} x(t, z, y + \lambda \xi) \right|_{\lambda=0}^2 = |v|^2 \text{ ed è ben noto che } v \text{ è la soluzione del}$$

problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{v} = C(t)v + B_1(t)\xi \\ v(0) = 0, \end{cases}$$

$$\text{dove } C(t) = \frac{\partial}{\partial x} B_1(x)y|_{x=x(t,z,y)} \text{ e } B_1(t) = B_1(x(t,z,y)).$$

Ora, se $U(t)$ è l'operatore di evoluzione associato a $C(t)$,

$$v(t) = U(t) \int_0^t U^{-1}(s) B_1(s) \xi \, ds \text{ e, per le nostre ipotesi, si può supporre sempre } C_1^{-1} \leq |U(s)| \leq C_1, \quad C_1^{-1} \leq |U^{-1}(s)| \leq C_1,$$

$$|(U(s)^{-1})'| \leq C_1 \quad \forall s \in [0, t_0], \quad \forall z \in V, \quad \forall y \in B(y_0, \bar{r}).$$

Dunque

$$|v(t)| \geq C_1^{-1} \left| \int_0^t U^{-1}(s) B_1(s) \xi \, ds \right| \geq C_1^{-1} (|U^{-1}(t)| \left| \int_0^t B_1(s) \xi \, ds \right| -$$

$$- \left| \int_0^t (U^{-1}(s))' \left(\int_0^s B_1(\sigma) \xi \, d\sigma \right) ds \right|) \geq$$

$$\geq C_1^{-1} (C_1^{-1} \left| \int_0^t B_1(s) \xi \, ds \right| - C_1 \left| \int_0^t \left| \int_0^s B_1(\sigma) \xi \, d\sigma \right| ds \right).$$

Se proviamo allora che, per t abbastanza vicino a zero e

$$\forall (z, y) \in V \times B(y_0, \bar{r})$$

$$(2.2.b) \quad \int_0^t \left| \int_0^s B_1(\sigma) \xi \, d\sigma \right| ds \geq (2C_1^2)^{-1} \left| \int_0^t B_1(s) \xi \, ds \right|,$$

si può concludere che $|v(t)| \geq c_2 |(\int_0^t B_1(s) ds) \xi|$ e dunque che il k -mo autovalore di $\langle u_i, u_j \rangle$ $i, j = 1, \dots, n$ è minorato, a meno di una costante, del k -mo autovalore di $\int_0^t B_1(s) ds$ che è $\int_0^t \lambda_j(x(s, z, y)) ds =$
 $= x_j(t, z, y) - z_j \geq c t^{\alpha_j}$. D'altra parte,

$$\int_0^t |(\int_0^s B(\sigma) d\sigma) \xi| ds \leq \sum_{j=1}^n \int_0^t (\int_0^s \lambda_j(x(\sigma, z, y)) d\sigma) |\xi_j| \leq$$

$$\leq t \sum_{j=1}^n (\int_0^t \lambda_j(x(\sigma, z, y)) d\sigma) |\xi_j| \leq c_3 t |(\int_0^t B(\sigma) d\sigma) \xi|,$$

e dunque (2.2.b) è provata.

Esempio 2.3. Consideriamo, in un intorno dell'origine in \mathbb{R}^2 , l'operatore L la cui forma quadratica sia

$$\xi_1^2 + |f(x_1, x_2)|^{2\gamma} \xi_2^2,$$

dove $\gamma > 1$, $f \in C^{m+1}$, $f(0) = \partial_1 f(0) = \dots = \partial_1^{(m-1)} f(0) = 0$,
e $(\partial_1^{(m)} f)(0) \neq 0$. Proviamo che la matrice $B = B_1^2$, ove

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & |f(x_1, x_2)|^\alpha \end{pmatrix} = B_1$$

definisce una struttura $(m\gamma+2)$ -sub-riemanniana in un intorno dell'origine. Sia $x(t, z, y)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\dot{x} = B_1(x)y, \quad x(0) = z_j;$$

si ha

(2.3.a) è verificata (2.2.a).

L'affermazione è ovvia per $j = 1$, con $\alpha_1 = 1$. Poniamo $w =$

$= x_2 - z_2$; si ha, se $B(y_0, \bar{r}) \subseteq R_+ \times R_+$

$$\dot{\omega}(t) = |f(z_1 + ty_1, \omega + z_2)|^\gamma y_2 \geq c_1(\gamma) \sum_{j=0}^m (\partial_1^j f)(z) \cdot$$

$(ty_1)^j/j! |^\gamma - c_2(\gamma) (\bar{\omega} + t^{(m+1)\gamma})$. Integrando e tenendo conto che

$\omega(s) \leq \omega(t)$ se $s \leq t$, si ha allora

$$\omega(t) \geq c_3 \int_0^t \left| \sum_{j=0}^m (\partial_1^j f)(z) (sy_2)^j/j! \right|^\gamma ds - c_4 t^{(m+1)\gamma+1} =$$

$$= c_4 t^{m\gamma+1} \int_0^1 \left| \sum_{j=0}^{m-1} (\partial_1^j f)(z) (sy_1)^j t^{k-m}/j! + \right.$$

$$\left. + (\partial_1^m f)(z) s^m/m! \right|^\gamma ds - c_6 t^\gamma \geq c_7 t^{m+1}, \text{ se } t \leq t_0.$$

t_0 opportuno e $0 < c_0 \leq \phi^{(m)}(z) \leq C_0$ in V , perché

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=0}^{m-1} \xi_k \sigma^k + \xi_m s^m \right|^\gamma ds \text{ è inferiormente limitato da una costante posi-}$$

tiva se ξ_m è lontano da zero e limitato.

Inoltre

(2.3.b) l'applicazione $y \mapsto x(t, z, y)$ è iniettiva in $B(y_0, \bar{r})$.

Infatti $\frac{\partial x_j}{\partial y_j}$ è sempre positiva: la cosa è ovvia se $j = 1$,

mentre se $j = 2$ l'affermazione discende dal fatto che $\frac{\partial x_2}{\partial y_2}$ è soluzione

di un problema di Cauchy lineare non omogeneo con termine noto

$|f(x(t, z, y))|^\gamma$ che è positivo per $t > 0$ a causa di (2.3.a).

Esempio 2.4. Si può verificare ([5]) che la matrice $(\gamma \geq 1)$

$$B(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & |x_1|^{2\gamma} & |x_1|^\gamma \\ 0 & |x_1|^\gamma & 1 \end{pmatrix}$$

definisce una struttura $(3+2\gamma)$ -sub-riemanniana in R^3 ; ciò si applica all'operatore $L = \partial_1^2 + (|x_1|^\gamma \partial_2 + \partial_3)^2$. Osserviamo che il più piccolo autovalore di B è identicamente uguale a zero.

3. Proviamo, ad esempio, che, se (2.d) è soddisfatta, allora sussiste (1.b).

Per ogni $t \in [0, t_0]$, poniamo:

$$u(z, t) = \int_{B(y_0, \bar{r})} dy \, u(x(t, z, y)) K(y),$$

dove $K \in C_0^\infty(B(y_0, \bar{r}))$, $K \geq 0$, $\int dy \, K = 1$. Poiché, evidentemente, $u(z, 0) = u(z)$, si può scrivere, $\forall z \in V$

$$u(z) = u(z, t_0) - \int_0^{t_0} dt \int dy \langle \dot{x}(t, z, y), \nabla u(x(t, z, y)) \rangle K(y) = I_1 + I_2.$$

Stimiamo la norma di I_2 . Si ha, se $2 < p < 2\alpha/(\alpha-2)$,

$$\begin{aligned} \|I_2; L^p(V)\| &\leq \\ &\leq \int_0^{t_0} dt \left(\int_V dz \left(\int dy |\langle \dot{x}(t, z, y), \nabla u(x(t, z, y)) \rangle K(y)|^p \right)^{1/p} \right) \\ &\leq \int_0^{t_0} dt \left(\int_V dz \left(\int dy \langle A \nabla u(x(t, z, y)), \nabla u(x(t, z, y)) \rangle^{1/2} K(y)^p \right)^{1/p} \right) = \int_0^{t_0} dt \, I_3. \end{aligned}$$

Poniamo ora $x(t, z, y) = y'$ il che è possibile per (2.a), (2.b) e (2.c)), $B(y_0, \bar{r}) = S$ e $\phi(t, z, \cdot) = (x(t, z, \cdot))^{-1}$; si ha:

$$I_3 = \left\{ \int_V dz \left(\int_{x(t, z, S)} dy' \langle A \nabla u(y'), \nabla u(y') \rangle^{1/2} K(\phi(t, z, y')) \right) \cdot \right. \\ \left. \cdot \left| \det \frac{\partial x}{\partial y}(t, z, \phi(t, z, y')) \right|^{-1} \right\}^{1/p}.$$

Poniamo poi $q = (1/p + 1/2)^{-1}$; osserviamo che risulta:

$$(3.a) \quad \int_{\mathbb{R}^n} dy' K^q(\phi(t, z, y')) \left| \det \frac{\partial x}{\partial y}(t, z, \phi(t, z, y')) \right|^{-q} \leq \\ \leq c t^{\alpha(1-q)} \quad \text{q.d. per } z \in V$$

e

$$(3.b) \quad \int_V dz K^q(\phi(t, z, y')) \left| \det \frac{\partial x}{\partial y}(t, z, \phi(t, z, y')) \right|^{-q} \leq \\ \leq c t^{\alpha(1-q)} \quad \text{q.d. per } y' \in \mathbb{R}^n$$

(si può sempre pensare di aver prolungato $K(\phi(t, z, \cdot))$ con zero fuori di $x(t, z, S)$). Infatti, l'integrale in (3.a) è uguale a

$$\int_S dy K^q(y) \left| \det \frac{\partial x}{\partial y}(t, z, y) \right|^{1-q} \geq$$

(a causa di (2.c), dal momento che $q > 1$)

$$\leq c_1 t^{\alpha(1-q)} \int_S dy K^q(y) = c_2 t^{\alpha(1-q)}.$$

Analogamente può essere provata la (3.b). Ora (3.a) e (3.b) permettono di applicare una disuguaglianza di Young generalizzata ([15], Teorema

4.1.2)

$$I_3 \leq C_3 t^{\alpha(1-q)/q} \left(\int_{\Omega} dy \langle (A \nabla u)(y), \nabla u(y) \rangle \right)^{1/2},$$

$$\text{e dunque } \int_0^t dt I_3 \leq C_4 \left(\int_{\Omega} dy \langle (A \nabla u)(y), \nabla u(y) \rangle \right)^{1/2},$$

poiché $\alpha(1-q)/q = \alpha(1/p - 1/2) > -1$.

La stima di I_1 è poi analoga.

La prova di (1.c) è tecnicamente più delicata; in sostanza, osservato che $\left(\int_{B(\bar{x}, \rho)} dx |u-u| \right)^2 \leq \int_{B(\bar{x}, \rho) \times B(\bar{x}, \rho)} dx dz |u(x) - u(z)|^2$, si riduce questo integrale su $B(\bar{x}, \rho) \times B(\bar{x}, \rho)$ ad un integrale su $B(\bar{x}, \rho) \times B(\bar{\xi}, \rho)$, dove $\bar{\xi}$ è scelto in modo che i fasci di curve $x(\cdot, \xi, y)$ uscenti da un punto $\xi \in B(\bar{\xi}, \rho)$ coprano, al variare di $y \in B(y_0, \bar{r})$, tutta la sfera $B(\bar{x}, \rho)$. Successivamente si esprime $u(x)-u(z)$ tramite un integrale sulle curve sub-unitarie e si integra prima su $B(\bar{x}, \rho)$ e poi su $B(\bar{\xi}, \rho)$ o viceversa a seconda che t sia lontano o vicino a zero (si veda [7]).

APPENDICE A. Supponiamo verificate (1.b) e (1.c); con il procedimento iterativo di Moser modificato si prova che, se u è una soluzione debole di $Lu = 0$, $u > 0$, allora, fissato $\bar{x} \in \Omega$, esistono $R_0 > 0$, $\beta > 0$, $C_{R_0} > 0$ (indipendenti da u) tali che
 $\forall p \in]-1, 1[, \forall r, \rho, R > 0, R/2 < \rho < r < R \leq R_0$, si ha:

$$(A.1) \quad \sup_{B(\bar{x}, \rho)} u^p \leq C_{R_0} (r - \rho)^{-\beta} \int_{B(\bar{x}, r)} u^p dx.$$

Inoltre, sempre con la stessa tecnica, si può provare che, se $\eta \in C_0^1(\Omega)$, allora, posto $v = \log u$

$$(A.2) \quad \int_{\mathbb{R}^n} dx \eta^2 < A \nabla v, \nabla v > \leq C \int_{\mathbb{R}^n} dx (< A \nabla \eta, \nabla \eta > + \eta^2).$$

Sia allora ρ_0 la costante di (1.c), e sia $\eta \equiv 1$ su $B(\bar{x}, \rho_0)$, $0 \leq \eta \leq 1$, $\text{supp } \eta \subseteq B(\bar{x}, 2\rho_0)$. Indichiamo con $Q^-(s)$ l'insieme $\{x \in B(\bar{x}, r); \log u < -s + v_r\}$. Si ha allora, $\forall s > 0, \forall r \in]0, \rho_1[$:

$$\bar{s} \mu(Q^-(s)) \leq \int_{Q^-(s)} dx (v_r - v) \leq \int_{B(\bar{x}, r)} dx |v - v_r| \leq$$

$$(\text{per (1.c)}) C \int_{B(\bar{x}, r)} dx < A \nabla v, \nabla v > \leq C \int_{\mathbb{R}^n} dx \eta^2 < A \nabla v, \nabla v > \leq$$

$$(\text{per (A.2)}) C_1 \int_{\mathbb{R}^n} dx (< A \nabla \eta, \nabla \eta > + \eta^2) = C_2(\rho_0).$$

Dunque $\exists C_3 = C_3(\rho_0)$ tale che, $\forall r \leq \rho_1$, si ha:

$$(A.3) \quad \mu(\{x \in B(\bar{x}, r); \log u < -s + v_r\}) \leq C_3 s^{-1}$$

e, analogamente

$$(A.4) \quad \mu(\{x \in B(\bar{x}, r); \log u > v_r + s\}) \leq C_3 s^{-1}.$$

La disuguaglianza di Harnack per la sfera $B(\bar{x}, r)$ segue allora da (A.1), (A.3) e (A.4) grazie al seguente lemma di Bombieri-Moser ([13], Lemma 3).

Lemma. Sia $\{Q(t), t \in [1/2, 1]\}$ una famiglia di sottoinsiemi misurabili di \mathbb{R}^n tali che $Q(\tau) \subseteq Q(t)$ se $\tau \leq t$, e sia $w: Q(1) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione misurabile e positiva tale che:

$$i) \quad \sup_{Q(\tau)} w^p \leq C_0 (t-\tau)^{-\beta} \mu(Q(1))^{-1} \int_{Q(t)} dx w^p,$$

$$\forall t, \tau, 1/2 \leq \tau < t \leq 1, \quad p \in]0, 1[$$

e

$$ii) \quad \mu(\{x \in Q(1); \log w > s\}) \leq C_0 \mu(Q(1)) s^{-1}$$

per convenienti β e $C_0 \in \mathbb{R}_+$. Allora esiste $\gamma = \gamma(\beta, C_0) > 0$ tale che

$$\sup_{Q(1/2)} w \leq \gamma.$$

Basterà infatti scegliere $Q(t) = B(\bar{x}, 2tR)$ e $w = \exp(-v_r)u$ e $\exp(v_r)u^{-1}$, successivamente. L'estensione poi al caso di un compatto K qualsiasi è classica.

BIBLIOGRAFIA

- [1] J.M. BONY - Principe de maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés, Ann. Inst. Fourier 19 (1969), 277-304.
- [2] D.E. EDMUNDS e L.A. PELETIER, A Harnack Inequality of Weak Solutions of Degenerate Quasilinear Elliptic Equations, J. London Math. Soc. (2), 5 (1972), 21-31.
- [3] E.B. FABES, C.E. KENIG, R.P. SERAPIONI, The Local Regularity of Solutions of Degenerate Elliptic Equations, Comm. P.D.E., 7 (1982), 77-116.
- [4] C. FEFFERMAN e D.H. PHONG, Subelliptic Eigenvalue Problems, Conference on Harmonic Analysis (Chicago 1981), W. Beckner e al. ed, Wadsworth (1981), 590-606.
- [5] B. FRANCHI, Propriétés des courbes intégrales de champs de vecteurs et estimations ponctuelles d'équations elliptiques dégénérées, Séminaire Goulaouic.-Meyer - Schwartz (1983/4), Exposé n. 3.
- [6] B. FRANCHI e E. LANCONELLI, Stime sub-ellittiche e metriche riemanniane singolari, I e II, Seminario di Analisi Matematica dell'Università di Bologna, 1982/3.
- [7] B. FRANCHI e E. LANCONELLI, Une condition géométrique pour l'inégalité de Harnack, J. Math. Pures et Appl., in corso di stampa.

- [8] B. GAVEAU, Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sous elliptiques sur certains groupes nilpotents, Acta Math., 139 (1977), 95-153.
- [9] I.M. KOLODII - Qualitative Properties of the Generalized Solutions of Degenerate Elliptic Equations, Ukrain. Mat. Z., 27 (1975), 320-328 = Ukrainian Math. J., 27 (1975) 256-263.
- [10] S.N. KRUKOV, Certain Properties of Solutions to Elliptic Equations, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 150 (1963), 270-273 = Soviet Math., 4 (1963), 686-690.
- [11] J. MOSER, A New Proof of De Giorgi's Theorem Concerning the Regularity Problem of Elliptic Differential Equations, Comm. Pure Appl. Math., 13 (1960), 457-468.
- [12] J. MOSER, On Harnack's Theorem for Elliptic Differential Equations, Comm. Pure Appl. Math., 14 (1961), 577-591.
- [13] J. MOSER, On a Pointwise Estimate for Parabolic Differential Equations, Comm. Pure Appl. Math., 24 (1971), 727-740,
- [14] M.K.V. MURTHY e G. STAMPACCHIA, Boundary Value Problems for Some Degenerate-Elliptic Operators, Ann. Mat. Pura Appl., 80 (4) (1968), 1-122.
- [15] G.O. OKIKIOLU, Aspects of the Theory of Bounded Integral Operators in L^p -Spaces, Academic Press, London-New York, 1971.